



а) Диаметр окружности, описанной около треугольника ABR равен гипотенузе этого треугольника AB . Пусть $BC = 4x$. Тогда $CH = 5x$; $BH = CH - BC = x = BR$.

В прямоугольном треугольнике AHC проведём высоту HP . $\triangle PHC \sim \triangle RBC$.

Поэтому $\frac{HP}{BR} = \frac{5}{4} \Rightarrow HP = \frac{5}{4}BR = \frac{5}{4}x$.

Из прямоугольного треугольника PCH по теореме Пифагора $PC^2 = CH^2 - HP^2$, т.е. $PC^2 = 25x^2 - \frac{25}{16}x^2 = \frac{375}{16}x^2 \Rightarrow PC = \frac{5\sqrt{15}}{4}x$, а из подобных треугольников

PHC и RBC : $RC = \frac{4}{5}PC = \sqrt{15}x$.

По свойствам высоты к гипотенузе

$$AP \cdot PC = HP^2 \Rightarrow AP = \frac{HP^2}{PC} = \frac{25x^2}{16} : \frac{5\sqrt{15}x}{4} = \frac{5x}{4\sqrt{15}} = \frac{5\sqrt{15}}{60}x = \frac{\sqrt{15}}{12}x.$$

$$AR = AP + PR = AP + PC - RC = \frac{\sqrt{15}}{12}x + \frac{5\sqrt{15}}{4}x - \sqrt{15}x = \frac{\sqrt{15}}{12}x + \frac{\sqrt{15}}{4}x = \frac{\sqrt{15}}{3}x.$$

Из прямоугольного треугольника ABR по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AR^2 + BR^2 = \frac{15}{9}x^2 + x^2 = \frac{24}{9}x^2 = \frac{8}{3}x^2 \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x = \frac{2\sqrt{6}}{3}x = \frac{2\sqrt{6}}{3}BR.$$

$$\text{б) } S_{\triangle HRC} = \frac{RC \cdot HP}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{15}x \cdot \frac{5}{4}x = \frac{5\sqrt{15}}{8}x^2 \Rightarrow \frac{5\sqrt{15}}{8}x^2 = 75 \Rightarrow x^2 = \frac{120x^2}{\sqrt{15}} = 8\sqrt{15}.$$

$$S_{\triangle HBR} = S_{\triangle AHC} - S_{\triangle RBC}.$$

$$AC = AP + PC = \frac{\sqrt{15}}{12}x + \frac{5\sqrt{15}}{4}x = \frac{16\sqrt{15}}{12}x = \frac{4\sqrt{15}}{3}x.$$

$$S_{\triangle AHC} = \frac{AB \cdot HP}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{15}}{3}x \cdot \frac{5}{4}x = \frac{5\sqrt{15}}{6}x^2. S_{\triangle RBC} = \frac{RC \cdot BR}{2} = \frac{\sqrt{15}}{2}x^2.$$

$$S_{\triangle HBR} = \frac{5\sqrt{15}}{6}x^2 - \frac{\sqrt{15}}{2}x^2 = \frac{\sqrt{15}}{3}x^2 = \frac{\sqrt{15}}{3} \cdot 8\sqrt{15} = 40.$$