**1.**

№3. Сумма сторон параллелограмма 30 см, а угол между ними $30^o$, какими должны быть стороны, чтобы площадь параллелограмма была минимальной.

Здесь опечатка! Последнее слово не «минимальной», а «максимальной»! Судите сами: если сумма всех сторон параллелограмма 30 см, то сумма смежных сторон 15 см. Если одна из смежных сторон равна $x$, то вторая – $15-x$. Площадь параллелограмма $S = x(15-x)\cdot\sin 30° = 0{,}5x(15-x) < 7{,}5x$, т.к. $15-x<15$. Устремляя $x$ к нулю, будем получать всё меньшую и меньшую площадь. Но параллелограмм «существует», пока ни одна из его сторон не равна 0, значит, минимальной площади нет!

Найдём, какими должны быть стороны параллелограмма, чтобы его пложадь была максимальной. Мы уже записали формулу для площади параллелограмма:

$$S(x) = 0{,}5x(15-x) \text{ или } S(x) = 7{,}5x - 0{,}5x^2.$$

$S'(x) = 7{,}5 - x$; $S'(x) = 0 \Leftrightarrow 7{,}5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 7{,}5$. При этом, если $x<7{,}5$, то $S'(x) = 7{,}5 - x > 0$, а если $x > 7{,}5$, то $S'(x) = 7{,}5 - x < 0$, т.е. при переходе через точку $x = 7{,}5$ производная $S'(x)$ меняет знак с «+» на «–», значит, при $x = 7{,}5$ функция $S(x)$ достигает максимума. При этом смежная сторона параллелограмма равна $15 - 7{,}5 = 7{,}5$.

Итак, для того, чтобы площадь параллелограмма с периметром 30 см и острым углом 30° была максимальной, все его стороны должны быть равны 7,5 см. При этом его площадь $S = 0{,}5\cdot 7{,}5^2 = 28{,}125\,\text{см}^2$.

Если всё же составитель задачи имел в виду, что 30 см – это сумма двух смежных сторон параллелограмма, то стороны параллелограмма должны быть по 15 см, а его площадь – 112,5 см$^2$.

Вот такое получилось длинное решение из-за одной опечатки!

№4. Исследовать функцию и построить ее график $y=x^3+6x^2+9x$

1) Область определения функции $D = (-\infty; +\infty)$;
2) Функция не является ни чётной, ни нечётной;
3) Точки пересечения с осями координат:

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -3;$

4) <u>Непрерывность</u>: функция непрерывна на всей области определения.

5) <u>Асимптоты</u>: Т.к. функция непрерывна, то вертикальных асимптот нет. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y(x)}{y}=\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)^2=+\infty$, а это значит, что на наклонных, ни горизонтальных асимптот нет.

6) <u>Экстремумы и интервалы возрастания и убывания</u>.

$y'=3x^2+12x+9$; $y'=0\Leftrightarrow 3x^2+12x+9\Leftrightarrow x^2+4x+3=0$.

$D=4^2-4\cdot 3=4$; $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4}}{2}$; $x_1=-3$, $x_2=-1$.

$y(-3)=0$ (см. п.3 точки пересечения с осями координат);

$y(-1)=-1+6-9=-4$.

Составим таблицу:

| $x$ | (–∞; –3) | (–3; –1) | (–1; +∞) |
|---|---|---|---|
| $y'$ | + положительная (>0) | – отрицательная (<0) | + положительная |
| $y$ | ↑ возрастает | ↓ убывает | ↑ возрастает |

Из таблицы видно, что точка (–3; 0) – максимум, а точка (–1; –4) – минимум.

7). <u>Интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба</u>.

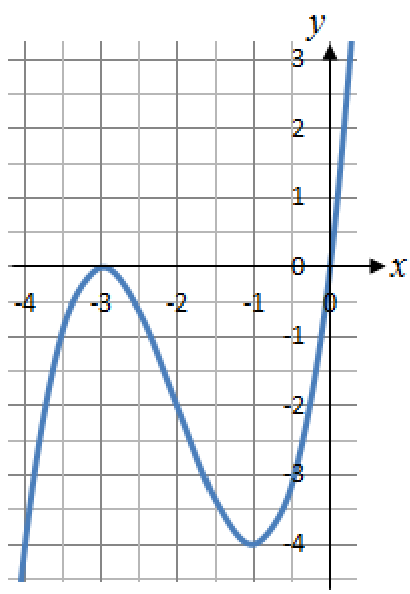
$y''=6x+12$; $y''=0\Leftrightarrow 6x+12=0\Leftrightarrow x=-2$; $y(-2)=-8+24-18=-2$;

$y'(-2)=3\cdot 4-24+9=-3$.

Составим ещё одну таблицу:

| $x$ | (–∞; –2) | (–2; +∞) | |
|---|---|---|---|
| $y''$ | – отрицательная (<0) | + положительная (<0) | |
| $y$ | ∩ выпукла | ∪ вогнута | |

Теперь можно построить график:




Точка (–3; 0) – максимум;
Точка (–1; –4) – минимум;
Точка (–2; –2) – перегиб.