

На пограничном контроле в стране N рано утром работали всего три пограничника. Первому пограничнику нужно 5 минут, чтобы проверить паспорт, второму – 7 минут, третьему – 9 минут. Последним рейсом прилетело 75 человек, которые хотят пройти пограничный контроль как можно быстрее. За какое наименьшее время они смогут это сделать? Будем считать, что как только один человек прошел пограничный контроль, на его место тут же встает следующий из очереди (то есть, на перемещение людей время не тратится).

Предварительные замечания.

В общем рекомендованный способ решения не указан. Задача на мой неискушённый взгляд «пахнет» динамическим программированием. Странно что уровень 1-4 класс. Поэтому поступим так. Я дам математическую модель. И её простую «полуавтоматическую» реализацию в электронной таблице. Думаю ныне 4й класс эти таблицы уже видел. (Где, это уже другой вопрос) и немного умеет ими пользоваться. А вообще можете написать программу на любом знакомом вам языке программирования (C, C++, Pascal, Basic, Python и т. д.).

РЕШЕНИЕ

Итак пусть к 1-му пограничнику (5 минутке) отправятся x человек, ко 2-му z , и к 3-му y человек. При этом общее число людей $N=75$.

$$N=75=x+y+z$$

и при этом:

$$x \geq 0; \quad (1)$$

$$y \geq 0;$$

$$z \geq 0;$$

Тогда 1й пограничник проверит паспорта у своих людей за время:

$$T_1=5 \cdot y \quad (2)$$

2й пограничник за время:

$$T_2=7 \cdot z \quad (3)$$

А 3-й пограничник за время:

$$T_3=9 \cdot x \quad (4)$$

Тут время в минутах.

Полное время обслуживания всех людей будет равно максимальному времени и T_1, T_2, T_3 . (Думаю, понятно почему так).

$$T_{\text{обс}} = \text{Max}(T_1, T_2, T_3) = \text{Max}(5y, 7z, 9x) \quad (5)$$

Вот это $T_{\text{обс}}$, из (5) нужно минимизировать, подбирая x, y, z с учётом условия (1).

NB. Собственно формулы (1) – (5) и составляют математическую модель.

Вот теперь вопрос, как их подобрать. Количество вариантов хоть и велико, но конечно. Можно было составить программу, которая просто «внаглую» перебрала бы все варианты для x , y , z , вычислила для них $T_{обс}$, и выбрала бы его минимальное значение. Но мы поступим так. Для начала зафиксируем x . Тогда на двух других останется

$$A = N - x = 75 - x$$

Минимизируем время обслуживания для 2х «быстрых» пограничников. Рассуждаем так. Всего A человек. Если 1-й обслужит y человек, то 2-й $z = A - y$ человек. Вместе 1-й и 2-й

$$y + A - y = A$$

Построим зависимости времен обслуживания T_1, T_2 от y .

$$\begin{aligned} T_1 &= 5y \\ T_2 &= 7z = 7(A - y) = -7y - 7A \end{aligned} \quad (6)$$

Наглядно это можно представить так как на рисунке 1. Проведем на рисунке так же линии $T = T_3 = 9x$ и $T_{обс} = \text{MAX}(T_1, T_2, T_3)$ Например так это будет для $N=75, x=10, A=75-10=65$.

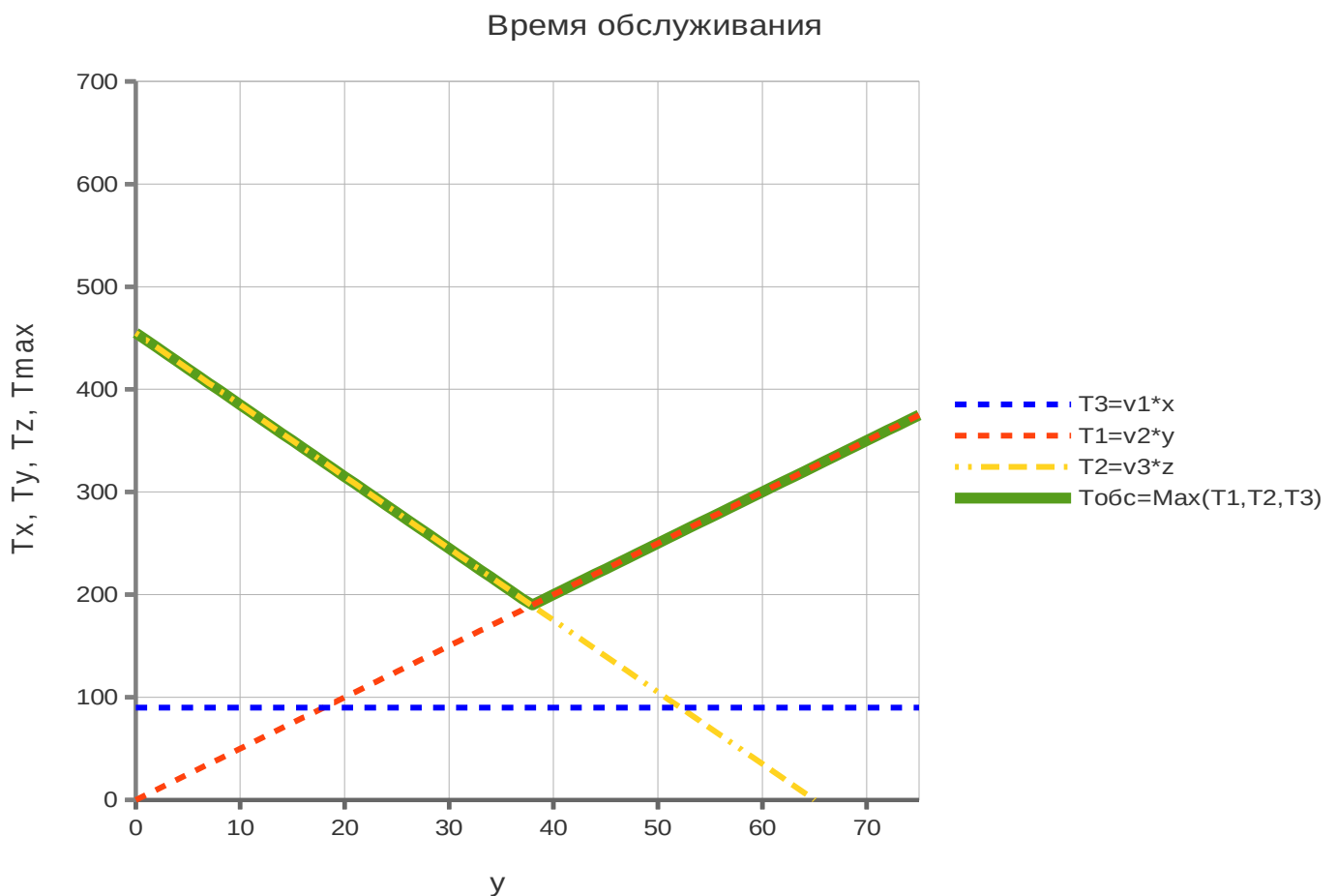


Рисунок 1: Частичная оптимизация при $x=10$

Видно что $T_{обс}$ в данном случае достигает минимума при $y=38$, соответственно $z=75-(x+y)=75-48=27$. Точнее можно проверить по таблице. Ну вот так, прогоняя x от 0 до N , выбираем минимум из минимумов. Составим соответствующий документ в электронной таблице. (У меня Libre Office и в оригинале Calc. Вдруг что с импортом не так приложу оба варианта таблицы оригинал ods и импортированный xlsx.)

По факту минимум найдется при $x=18$, $y=33$, $z=24$ (Всё правильно. Самому быстрому – больше всех, самому медленному меньше всех). Смотрите рисунок 2. Ну и таблицу при соответствующем значении x . (Вбивается в ячейку **B10**, отмеченную серым цветом.) В ячейках **B13**, и **J81**, (ярко-зеленые) получаем значение минимального времени обслуживания при заданном x . В нашем случае 168 минут. По основной таблице в ячейках (**J3 : J78**) находим время $T_{обс}=168$ и соответствующей строке получаем значения $y=33$, соответственно $z=24$.

Время обслуживания. Окрестность минимума.

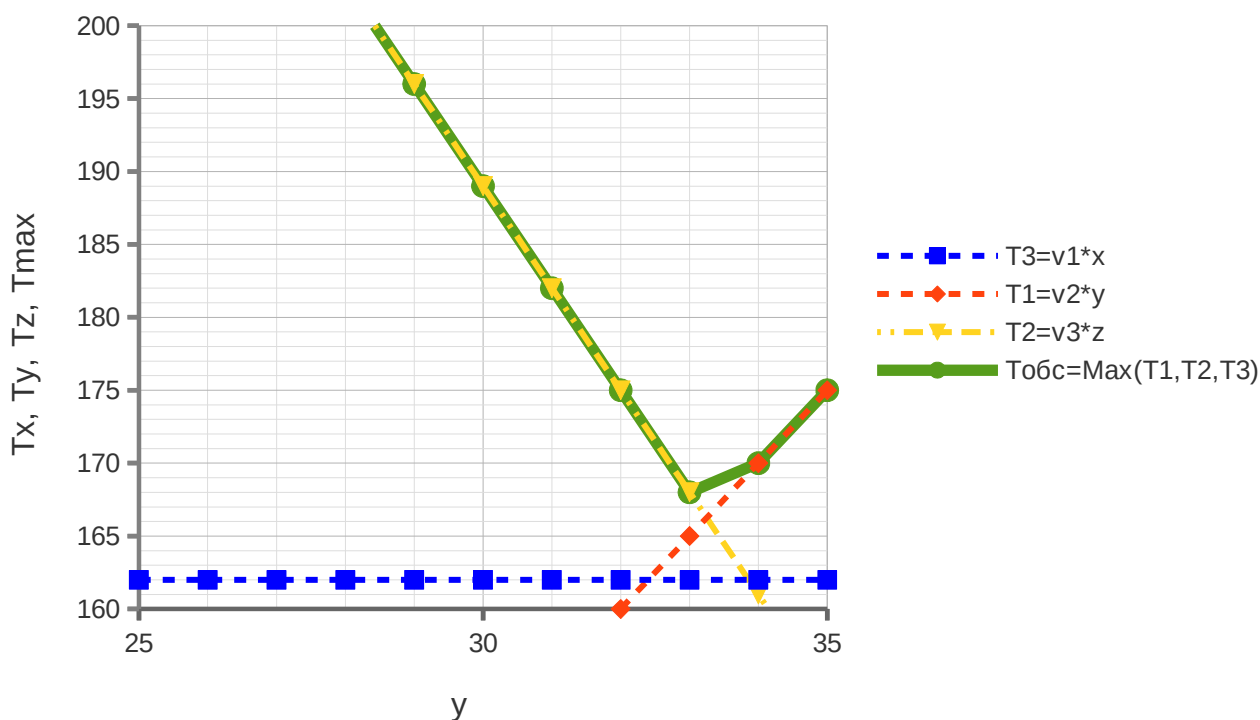


Рисунок 2: Окрестность найденного решения.

ОТВЕТ.

1-й пограничник должен проверить 33 паспорта, 2-й – 24, 3й – 18. При этом время проверки паспортов у 75 человек займёт 168 минут (2 часа 48 минут).