1. Дана правильная единичная треугольная призма. Найти расстояние от точки A до сечения (плоскости) A_1B_1C.

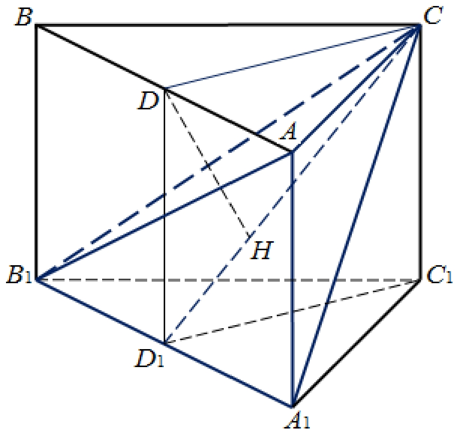

Рисунок следует располагать так, чтобы на нем было как можно больше «видимых линий». Это одна из причин, по которой я сделал свой рисунок. В любом случае, проводить дополнительные линии на рисунке с фото я бы не смог – это вторая причина.

<u>1-й способ</u>. $AB \parallel A_1B_1$ и $A_1B_1 \in (A_1B_1C)$, следовательно, $AB \parallel (A_1B_1C)$. Поэтому расстояние от точки A до (A_1B_1C) равно расстоянию до (A_1B_1C) от любой другой точки прямой AB.

Проведём $CD \perp AB$. Т.к. $(ABC) \perp (ABB_1A_1)$, то и $CD \perp (ABB_1A_1)$. $C_1C \perp (ABC) \Rightarrow C_1C \perp AB \Rightarrow (C_1CD) \perp AB$. $C_1C \parallel (ABB_1A)$ и поэтому (C_1CD) пересекает (ABB_1A_1) по прямой DD_1, параллельной C_1C , и $DD_1 \perp A_1B_1$
$CD_1 \in (C_1CD) \Rightarrow CD_1 \perp AB \Rightarrow CD_1 \perp A_1B_1 \Rightarrow A_1B_1 \perp (CC_1D_1D)$. Плоскость A_1B_1C проходит через прямую A_1B_1, перпендикулярную плоскости CC_1D_1D, и поэтому $(A_1B_1C) \perp (CC_1D_1D)$. Из точки D проведём перпендикуляр DH к CD_1. Т.к DH лежит в плоскости, перпендикулярной (A_1B_1C), то $DH \perp (A_1B_1C)$, и его длина есть расстояние от точки A до (A_1B_1C).

CD – высота треугольника ABC: $CD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $DD_1 = AA_1 = 1$. По теореме Пифагора $CD_1 = \sqrt{DD_1^2 + CD^2} = \sqrt{1 + \dfrac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. $DH = \dfrac{DD_1 \cdot CD}{CD_1} = \dfrac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} : \dfrac{\sqrt{7}}{2} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

<u>2-й способ</u>. Рассмотрим пирамиду CAA_1B_1. Если за её вершину принять точку C, а за основание – AA_1B_1, то $CD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ – высота этой пирамиды, и её объём:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AA_1 \cdot A_1B_1}{2} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}.$$

Если за вершину взять точку A, а за основание - A_1B_1C, то

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C} \cdot h,$$ где h - искомое расстояние от точки A до A_1B_1C.

$$\frac{1}{3} \cdot S_{A_1B_1C} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} \Leftrightarrow S_{A_1B_1C} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{A_1B_1 \cdot CD_1}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$